Estimation de la valeur propre principale d’opérateurs de Schrödinger

Maria J. ESTEBAN

C.N.R.S. et Université Paris-Dauphine

En collaboration avec : Jean Dolbeault, Ari Laptev et Michael Loss

http://www.ceremade.dauphine.fr/∼esteban/

Motivation

Considérons un opérateur elliptique

$$L - V \quad \text{où} \quad L = -\Delta \;/ - \Delta_A \quad \text{sur/dans} \quad X$$

où $X = R^d$, ou $X = S^d$, ou $X = S^{d-1} \times R$.

Et appelons $\lambda_1(V)$ la plus petite valeur propre de cet opérateur. C'est-à-dire,

$$\lambda_1(V) = \inf_{u \in H^1(X)} \frac{\int_X (|\nabla u|^2 - V|u|^2)\, dx}{\int_X |u|^2\, dx} \, .$$

Le but de cet exposé est d'expliquer comment avoir des estimations optimales pour $\lambda_1(V)$ en fonction des normes L^p de V (ou plutôt de la partie positive de V, V_+).

Espace Euclidien : Inégalités de Keller et Lieb-Thirring

$$H = -\Delta - V \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^d)$$

Si V n'est pas négatif, et si H a des valeurs propres négatives, appelons-les : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

$$(\mathrm{LT}^-, 1976) \qquad \sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^\gamma \leq L_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} V_+^{\gamma + \frac{d}{2}} ,$$

pour $\gamma \geq 1/2$ si $d = 1$, $\gamma > 0$ si $d = 2$ et $\gamma \geq 0$ si $d \geq 3$.

Beaucoup de noms associés à ces inégalités : Keller, Lieb-Thirring, Weidl, Cwikel, Rosenbljum, Aizenman, Laptev-Weidl, Helffer, Robert, ... Dolbeault-Laptev-Loss, ...

$$(\mathrm{Keller}, 1961) \qquad |\lambda_1|^\gamma \leq L^1_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} V_+^{\gamma + \frac{d}{2}} ; \quad V_+ = \max\{V, 0\}$$

Il y a un certain nombre de conjectures sur les valeurs optimales pour les meilleurs constantes dans ces inégalités. Par exemple, il a été conjecturé par Lieb et Thirring que pour γ suffisamment grand,

$$L_{\gamma,d} \approx L^{\mathrm{cl}}_{\gamma,d} = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2^d\, \pi^{d/2}\, \Gamma\left(\sigma + \frac{d}{2} + 1\right)} ,$$

et cette constante “classique" peut être calculée comme une moyenne dans l'espace des phases.

Inégalités sur des variétés

Très peu de résultats connus :

• P. Federbusch et O.S. Rothaus : lien entre les inégalités de Sobolev logarithmiques et l'état fondamental d'opérateurs de Schrödinger.

• Levin et Solomyak : preuve de l'inégalité de Rozenbljum-Lieb-Cwikel (cas $\gamma = 0$) sur des variétés.

• Lieb, Levin, Ouabaz-Poupaud, ...

• 2 articles d'Ilyin, où il étudie ces inégalités sur la sphère unité, dans l'espace des fonctions orthogonales aux constantes.

L'exclusion des constantes mène à des résultats du type “classique", du même type que celles obtenues dans le cas Euclidien.

Relation entre inégalités d'interpolation et estimations spectrales I

Résultat standard du calcul des variations implique que pour $q \in (2, 2^*)$, $\alpha > 0$,

$$\mu(\alpha) := \inf_{u \in \mathrm{H}^1(X) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(X)} + \alpha \, \|u\|^2_{L^2(X)}}{\|u\|^2_{L^q(X)}}$$

est atteint si X est une variété compacte sans bord (mesure sur S^d la mesure de probabilité uniforme).

(Si on est dans une variété non-compacte ou dans R^d ou si on remplace $-\Delta$ par $-\Delta_A$, il faut invoquer la concentration-compacité pour dire quand cet infimum est atteint).

- $\mu(\alpha)$ est une fonction strictement croissante, et concave.
- $\mu(0) = 0$

Moreover,

$$\int_X |\nabla u|^2 \, d\sigma + \alpha \int_X |u|^2 \, d\sigma \geq \mu(\alpha) \left(\int_X |u|^q \, d\sigma \right)^{\frac{2}{q}} \quad \forall \, u \in \mathrm{H}^1(X) \, , \quad \forall \, \alpha > 0 \, .$$

Et donc, si nous appelons $\alpha(\mu)$ l'inverse de $\mu(\alpha)$, nous avons

$$\int_X |\nabla u|^2 \, d\sigma - \mu \left(\int_X |u|^q \, d\sigma \right)^{\frac{2}{q}} \geq -\alpha(\mu) \int_X |u|^2 \, d\sigma \quad \forall \, u \in \mathrm{H}^1(X) \, , \quad \forall \, \mu > 0 \, .$$

Relation entre inégalités d'interpolation et estimations spectrales II

$$\int_X |\nabla u|^2 \, d\sigma - \mu \left(\int_X |u|^q \, d\sigma \right)^{\frac{2}{q}} \geq -\,\alpha(\mu) \int_X |u|^2 \, d\sigma \quad \forall\, u \in \mathrm{H}^1(X)\,, \quad \forall\, \mu > 0\,.$$

Pour un potentiel V et une fonction quelconque $u \in \mathrm{H}^1(X)$, si $\frac{2}{q} + \frac{1}{p} = 1$, nous avons

$$\int_X |\nabla u|^2 \, d\sigma - \int_X V\, |u|^2 \, d\sigma \geq \int_X |\nabla u|^2 \, d\sigma - \|V\|_{L^p(X)} \left(\int_X |u|^q \, d\sigma \right)^{\frac{2}{q}}$$

Si l'on définit $\mu = \|V\|_{L^p(X)}$, alors,

$$\int_X |\nabla u|^2 \, d\sigma - \int_X V\, |u|^2 \, d\sigma \geq -\,\alpha(\|V\|_{L^p(X)}) \int_X |u|^2 \, d\sigma \quad \forall\, u \in \mathrm{H}^1(X)\,, \quad \forall\, \mu > 0\,.$$

et donc $\quad \lambda_1(-\Delta - V) \geq -\,\alpha\left(\|V\|_{L^p(X)}\right)$

L'optimalité de l'estimation ci-dessus peut être prouvée : pour n'importe quel $\mu > 0$ il suffit de considérer une fonction u satisfaisant

$$\int_X |\nabla \bar{u}|^2 \, d\sigma - \mu \left(\int_X |\bar{u}|^q \, d\sigma \right)^{\frac{2}{q}} = -\,\alpha(\mu) \int_X |\bar{u}|^2 \, d\sigma$$

et après, choisir $\bar{V} = \mu\, \bar{u}^{q-2}$. On a : $\lambda_1(\bar{V}) = -\alpha\left(\|\bar{V}\|_{L^p(X)}\right)$.

Le résultat de Keller montré ci-dessus indique que pour tout $p > \max\{1, d/2\}$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tout $V \in L^p$,

$$|\lambda_1(V)|^{p-\frac{d}{2}} \leq C_p \int_{R^d} V_+^p \,,$$

c'est-à-dire

$$|\lambda_1(V)| \leq C_p^{\frac{2}{2p-d}} \, \|V_+\|_p^{\frac{2p}{2p-d}} \,,$$

ce qui équivaut à dire que

$$\alpha_{R^d}(\mu) = C\, \mu^{\frac{2p}{2p-d}}$$

QUESTION 1 : C'est toujours le cas que la fonction $\alpha_X(\cdot)$ (ou $\mu_X(\cdot)$) est une puissance ? La réponse est NON, comme nous verrons par exemple dans le cas ou $X = S^d$.

QUESTION 2 : Comment connaître le comportement de la fonction $\mu_X(\cdot)$? En étudiant le comportement des solutions du problème de minimisation, c'est-à-dire, les solutions positives de l'équation d'Euler-Lagrange correspondante :

$$-\Delta u + \alpha u = u^{q-1} \quad \text{dans} \quad X$$

Résultats sur la sphère S^d

THM [Dolbeault-E-Laptev].- Soit $d \geq 1$, $p \in \big(\max\{1, d/2\}, +\infty\big)$. Il existe une fonction croissante $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui est convexe pour $\mu \in \big(\frac{d}{2}\,(p-1), +\infty\big)$, et telle que

$$(1) \qquad |\lambda_1(-\Delta - V)| \leq \alpha\big(\|V\|_{L^p(S^d)}\big)\,,$$

pour tout potentiel positif $V \in \mathcal{L}^p(S^d)$.

$$(2) \qquad \alpha(\mu) = \mu\,, \quad \forall \mu \in \big[0, \tfrac{d}{2}\,(p-1)\big]$$

Et pour des valeurs grandes de μ,

$$(3) \qquad \alpha(\mu)^{p-\frac{d}{2}} = C_d\,\mu^p\,(1 + o(1))\,, \quad p = \frac{q}{q-2}\,.$$

L'estimation (1) est optimale dans le sens que pour toute valeur de $\mu = \|V\|_{L^p(S^d)}$, il existe un potentiel V positif tel que $|\lambda_1(-\Delta - V)| = \alpha(\mu)$, et ceci pour tout $\mu \in \big(\frac{d}{2}\,(p-1), +\infty\big)$.

Si $\mu \leq \frac{d}{2}\,(p-1)$, l'égalité a lieu pour les fonctions constantes.

Inégalités de type Sobolev sur la sphère

Sur la sphère d-dimensionnelle, on considère l'inégalité d'interpolation

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(S^d)} + \frac{d}{p-2}\,\|u\|^2_{L^2(S^d)} \geq \frac{d}{p-2}\,\|u\|^2_{L^p(S^d)} \quad \forall\, u \in \mathrm{H}^1(S^d, d\mu)\,, \qquad (1)$$

où la mesure $d\mu$ la mesure de probablilité uniforme induite sur S^d par la mesure de Lebesgue dans $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$; l'exposant $p \geq 1$, $p \neq 2$, est tel que $p \leq 2^* := \frac{2\,d}{d-2}$ si $d \geq 3$.

Le cas $p = \frac{2\,d}{d-2}$ correspond à l'inégalité de Sobolev (équivalent via projection stéreographique).

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2\, dx \geq \mathsf{S}_d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{2\,d}{d-2}}\, dx\right)^{\frac{d-2}{d}} \quad \forall\, u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)\,,$$

PREUVES DE (1) $+$ LES MINIMISEURS SONT LES CONSTANTES PAR: Bidaut-Véron – Véron (PDE, méthode de rigidité, 1991); Beckner (méthode d'analyse harmonique, 1993); Bakry-Emery et al (méthode du "carré du champ" , avec utilisation d'une méthode de flot, 1996 +; seulement pour $2 < p \leq 2^\# := \frac{2\,d^2+1}{(d-1)^2} < 2^*$).

Méthode de flot linéaire

Définissons $\rho = |u|^p$. Les deux inégalités ci-dessous sont équivalentes.

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(S^d)} + \frac{d}{p-2}\,\|u\|^2_{L^2(S^d)} \geq \frac{d}{p-2}\,\|u\|^2_{L^p(S^d)}\,.$$

$$\int_{S^d} |\nabla \rho^{\frac{1}{p}}|^2 \, d\omega \geq \frac{d}{p-2}\left[\left(\int_{S^d} \rho \, d\omega\right)^{\frac{2}{p}} - \int_{S^d} \rho^{\frac{2}{p}} \, d\omega\right].$$

Si l'on définit les fonctionnelles $\mathcal{E}_p$ and $\mathcal{I}_p$ par

$$\mathcal{I}_p[\rho] := \int_{S^d} |\nabla \rho^{\frac{1}{p}}|^2 \, d\omega \ , \quad \mathcal{E}_p[\rho] := \frac{1}{p-2}\left[\left(\int_{S^d} \rho \, d\omega\right)^{\frac{2}{p}} - \int_{S^d} \rho^{\frac{2}{p}} \, d\omega\right] \quad \text{if} \quad p \neq 2\,,$$

alors l'inégalité ci-dessus peut se re-écrire comme suit : $\mathcal{I}_p[\rho] \geq d\,\mathcal{E}_p[\rho]$. Pour le démontrer on peut utiliser le flot linéaire suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^d. Nous avons $\frac{d}{dt}\left(\int_{S^d} \rho \, d\omega\right) = 0$

Si $p \leq 2^\#$, $\quad \dfrac{d}{dt}\mathcal{E}_p[\rho] = -\,\mathcal{I}_p[\rho]$ and $\dfrac{d}{dt}\mathcal{I}_p[\rho] \leq -\,d\,\mathcal{I}_p[\rho]\,.$

Flots linéaires / non-linéaires

On veut démontrer $\mathcal{I}_p[\rho] - d\,\mathcal{E}_p[\rho] \geq 0$. Pour $p \leq 2^{\#}$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{I}_p[\rho] - \,d\,\mathcal{E}_p[\rho]\Big) \leq (-d+d)\,\mathcal{I}_p[\rho] = 0\,.$$

De plus, il n'est pas difficile de montrer que ρ converge vers une constante quand $t \to +\infty$ et que

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(\mathcal{I}_p[\rho] - \,d\,\mathcal{E}_p[\rho]\Big) = 0\,.$$

Qu'est-ce qui se passe si $2^{\#} < p < 2^*$?

PROPOSITION [Dolbeault, E., Loss]. Quand $2^{\#} < p < 2^*$, on peut trouver une fonction ρ_0 telle que ρ est solution de $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta\rho\,,\;\; \rho(t=0) = \rho_0$, et

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{I}_p[\rho] - \,d\,\mathcal{E}_p[\rho]\Big)\Big|_{t=0} > 0\,.$$

Mais, dans ce cas-ci on peut utiliser le flot non linéaire $\frac{d\,\rho}{dt} = \Delta\rho^m$, pour un $m \neq 1$ bien choisi.

Les calculs sont beaucoup plus compliqués, mais l'idée est à peu près la même. ET cette méthode couvre aussi le cas $p \in (1,2)$.

Cas du cylindre $\mathcal{C} = R \times S^{d-1}$

Pour prouver que le problème de minimisation

$$\mu(\alpha) := \inf_{u \in \mathrm{H}^1(\mathcal{C}) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathcal{C})} + \Lambda \, \|u\|^2_{L^2(\mathcal{C})}}{\|u\|^2_{L^q(\mathcal{C})}}$$

a une solution il faut utiliser la concentration-compacité, parce que les suites minimisantes pourraient ne pas etre compactes due a la non compacité de $\mathcal{C}$.

En fait, par un changement de fonction astucieux (du type Emden-Fowler)

$$s = \log |x| \;, \quad \omega = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1} \;, \quad \varphi(s, \omega) = |x|^{-a} \, v(x) \;, \quad \Lambda = \frac{1}{4} \, (d - 2 - 2a)^2$$

le problème de minimisation ci-dessus est équivalent à

$$\frac{1}{C_{a,b}} = \inf \quad \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla v|^2}{|x|^{2\,a}} \; dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v|^p}{|x|^{b\,p}} \; dx \right)^{2/p}}$$

qui est équivalent à la recherche de la meilleure constante dans les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

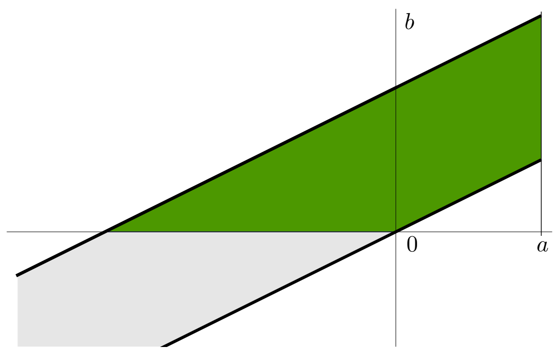
$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v|^p}{|x|^{b\,p}} \; dx \right)^{2/p} \leq \mathsf{C}_{a,b} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla v|^2}{|x|^{2\,a}} \; dx \qquad \forall \; v \in \mathcal{D}_{a,b}$$

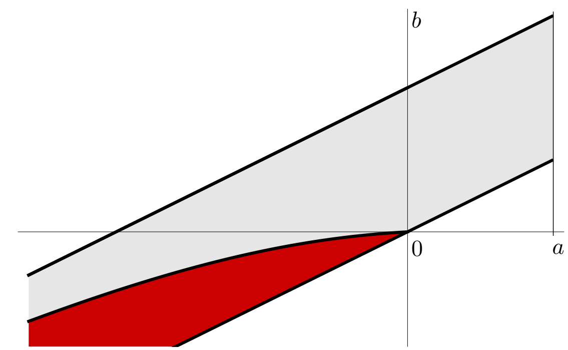
Symétrie /versus Rupture de symétrie

Beaucoup de gens ont travaillé sur la symétrie ou la rupture de symétrie des fonctions extremales pour ces inégalités de CKN

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v|^p}{|x|^{b\,p}}\,dx\right)^{2/p} \leq \mathsf{C}_{a,b} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla v|^2}{|x|^{2\,a}}\,dx \qquad a < \frac{d-2}{2}$$

Des méthodes de symétrisation ou de *moving-planes* ont permis de montrer la symétrie pour $a > 0$ et pour $a < 0\,,\; b > 0$





Existence : Th. Aubin, G. Talenti, E. Lieb, P.-L. Lions, ...

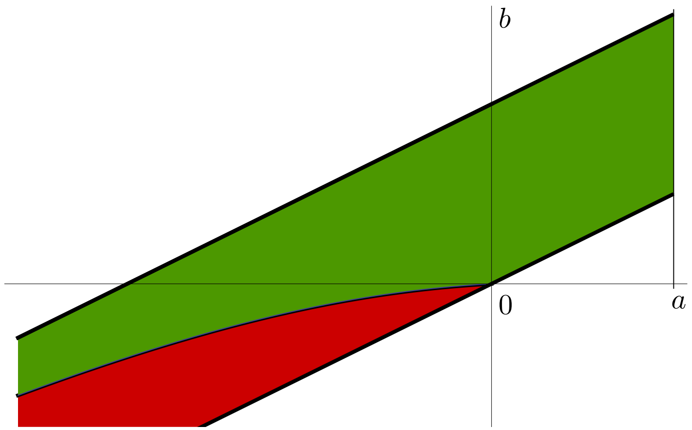
Symétrie : [Chou, Chu ; Horiuchi ; Betta, Brock, Mercaldo, Posteraro] $+$ Perturbation results: [CS Lin, ZQ Wang ; Smets, Willem ; Dolbeault- E., Loss, Tarantello].

Rupture de symétrie : [Smets-Willem, Catrina-Wang, et Felli-Schneider]

Résultat optimal de symétrie [Dolbeault-E. Loss, 2016]

Un résultat basé sur l'utilisation de flots non-linéaires et entropies.

[Dolbeault, E., Loss, 2016]



COROLLAIRE : Dans la zone verte (optimale), les minimiseurs de notre problème d'origine sont à symétrie radiale, donc le problème de minimisation est un problème $1d$, que l'on sait résoudre explicitement, et donc, dans la zone verte on a une estimation spectrale totalement explicite pour $\lambda_1(V) = \lambda_1(-\Delta - V)$ dans le cylindre !

Et dans cette zone-là, les potentiels optimaux sont $1d$, explicites : $C/\cosh^2 s$.

Remarque : Dans ce problème dès que la fonction extremale radiale est stable, donc minimum local, elle est le minimum global.

Idée de la preuve : Problème équivalent

Si l'on définit

$$\mathsf{D}w = \left(\alpha\,\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r}\,\nabla_\omega w\right)\,, \quad \alpha = \frac{p-2}{2}\sqrt{\Lambda}\,, \quad n = \frac{d-b\,p}{\alpha}$$

$$\mathcal{L}_{\,n} w := -\,\mathsf{D}^*\,\mathsf{D}\,w = \alpha^2\,w'' + \alpha^2\,\frac{n-1}{r}\,w' + \frac{\Delta\,w}{r^2}\,.$$

alors, les inégalités de CKN peuvent s'écrire

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |w|^{\frac{2n}{n-2}}\,d\mu\right)^{\frac{n-2}{n}} \le C\int_{\mathbb{R}^d} |\mathsf{D}w|^2\,d\mu\,, \quad d\mu = r^{n-1}\,dr\,d\omega$$

et l'équation d'Euler-Lagrange pour ce problème s'écrit “comme" celle correspondante à l'inégalité de Sobolev critique en “dimension n", MAIS en dimension d !

$$-\mathcal{L}_{\,n}\,w = w^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{dans } \mathbb{R}^d$$

Equation de diffusion rapide et décroissance de l'information de Fisher I

Définissons $u = |w|^p, \qquad p = \frac{2\,n}{n-2}$.

A une constante multiplicative près, $\int_{\mathbb{R}^d} |w|^p\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} u\, d\mu$, et $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathsf{D}w|^2\, d\mu = \mathcal{I}[u]$, avec

$$\mathcal{I}[u] := \int_{\mathbb{R}^d} u\, |\mathsf{Dp}|^2\, d\mu\,, \quad \mathsf{p} = \frac{m}{1-m}\, u^{m-1} \quad \text{and} \quad m = 1 - \frac{1}{n}$$

Ici $\mathcal{I}$ est l'*information de Fisher* et p est la *pression.*

On définit alors l'équation de diffusion rapide

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}\, u^m\,, \quad m = 1 - \frac{1}{n}$$

▷ STRATEGIE: En supposant que $\alpha \le \alpha_{\rm FS}$, (ZONE VERTE)

1) prouver que pour tout $t \ge 0$, $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} u(t)\, d\mu = 0$ et que $\frac{d}{dt}\mathcal{I}[u(t,\cdot)] \le 0$,

2) prouver que $\frac{d}{dt}\mathcal{I}[u(t,\cdot)] = 0$ implique que u est à symétrie radiale.
(Ceci marche exactement dans la zone verte !).

3) Pour un point-critique de $\mathcal{I}$, u_0 : $\frac{d}{dt}\, \mathcal{I}[u]_{|_{t=0}} = \mathcal{I}'[u_0] \cdot \mathcal{L}\, u_0^m = 0$

Equation de diffusion rapide et décroissance de l'information de Fisher II

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}[u(t,\cdot)] = -\,2\,(n-1)^{n-1}\,\mathcal{K}[\mathsf{p}] := -\,2\,(n-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^d}\mathsf{k}[\mathsf{p}]\;\mathsf{p}^{1-n}\,d\mu\,,,$$

$$\mathsf{k}[\mathsf{p}] := \mathcal{Q}(\mathsf{p}) - \frac{1}{n}\,(\mathcal{L}\,\mathsf{p})^2 = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,|\mathsf{D}\mathsf{p}|^2 - \mathsf{D}\mathsf{p}\cdot\mathsf{D}\,\mathcal{L}\,\mathsf{p} - \frac{1}{n}\,(\mathcal{L}\,\mathsf{p})^2$$

Lemme.- Si $n \neq 1$ est un nombre réel, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, et si $\mathsf{p} \in C^3((0,\infty)\times\mathfrak{M})$ est définie sur une variété Riemanienne régulière et sans bord. Alors, il existe une constante $\zeta_\star > 0$, telle que

$$\mathsf{k}[\mathsf{p}] = \alpha^4\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\mathsf{p}'' - \frac{\mathsf{p}'}{r} - \frac{\Delta_\omega\,\mathsf{p}}{\alpha^2\,(n-1)\,r^2}\right]^2 + 2\,\alpha^2\,\frac{1}{r^2}\left|\nabla_\omega\mathsf{p}' - \frac{\nabla_\omega\mathsf{p}}{r}\right|^2 + \frac{1}{r^4}\,\mathsf{k}_{\mathfrak{M}}[\mathsf{p}]\,,$$

avec (utilisant la formule de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck)

$$\begin{aligned}\mathsf{k}_{\mathfrak{M}}[\mathsf{p}] &:= \frac{1}{2}\,\Delta_\omega\,|\nabla_\omega\mathsf{p}|^2 - \nabla_\omega\mathsf{p}\cdot\nabla_\omega\Delta_\omega\,\mathsf{p} - \tfrac{1}{n-1}\,(\Delta_\omega\,\mathsf{p})^2 - (n-2)\,\alpha^2\,|\nabla_\omega\mathsf{p}|^2\\ &\geq (n-2)\,(\alpha_{\mathrm{FS}}^2 - \alpha^2)\int_{S^d}|\nabla_\omega\mathsf{p}|^2\,\mathsf{p}^{1-n}\,d\omega + \zeta_\star\,(n-d)\int_{S^d}|\nabla_\omega\mathsf{p}|^4\,\mathsf{p}^{1-n}\,d\omega\,.\end{aligned}$$

Et ZONE VERTE ssi $\alpha_{\mathrm{FS}}^2 - \alpha^2 \geq 0$.

Generalized Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities (CKN)

Let $d \geq 3$. For any $p \in [2, p(\theta,d) := \frac{2d}{d-2\theta}]$, there exists a positive constant $\mathsf{C}(\theta,p,a)$ such that

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v|^p}{|x|^{b\,p}}\,dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq \mathsf{C}(\theta,p,a)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla v|^2}{|x|^{2\,a}}\,dx\right)^{\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v|^2}{|x|^{2\,(a+1)}}\,dx\right)^{1-\theta}$$

In the radial case, with $\Lambda = (a-a_c)^2$, the best constant when the inequality is restricted to radial functions is $\mathbb{C}CKN^*(\theta,p,a)$ and (see [Del Pino, Dolbeault, Filippas, Tertikas]):

$$C_{CKN}(\theta,p,a) \geq C^*_{CKN}(\theta,p,a) = C^*_{CKN}(\theta,p)\,\Lambda^{\frac{p-2}{2p}-\theta}$$

$$C^*_{CKN}(\theta,p) = \left[\frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\right]^{2\,\frac{p-1}{p}}\left[\frac{(p-2)^2}{2+(2\,\theta-1)\,p}\right]^{\frac{p-2}{2\,p}}\left[\frac{2+(2\,\theta-1)\,p}{2\,p\,\theta}\right]^{\theta}\left[\frac{4}{p+2}\right]^{\frac{6-p}{2\,p}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2}{p-2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{2}{p-2}\right)}\right]^{\frac{p-2}{p}}$$

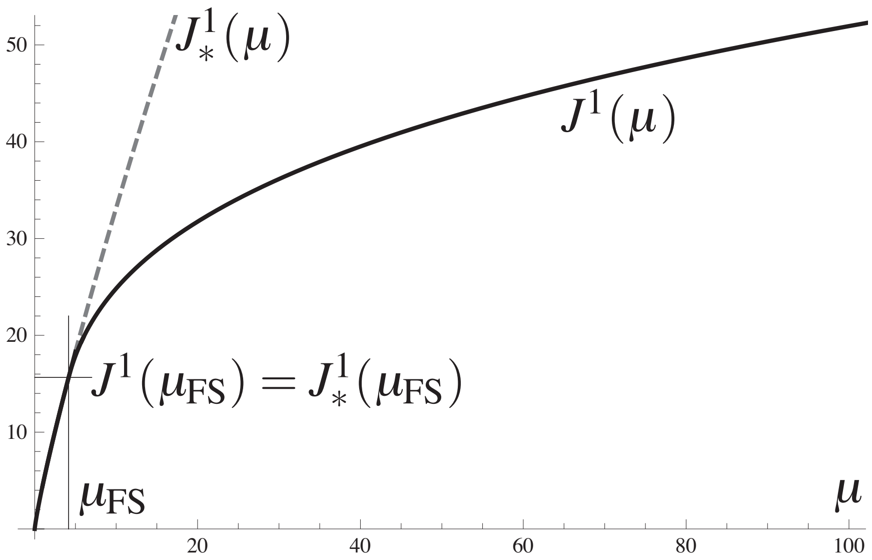
and for θ small, we have proved that there is symmetry breaking for certain values of (Λ,p) such that $u^*_{\Lambda,p}$ is stable! In principle in all cases where we have observed this phenomenum, $\theta \leq 0.7$ approx.

(Dolbeault, E., Tarantello, Tertikas (2011))

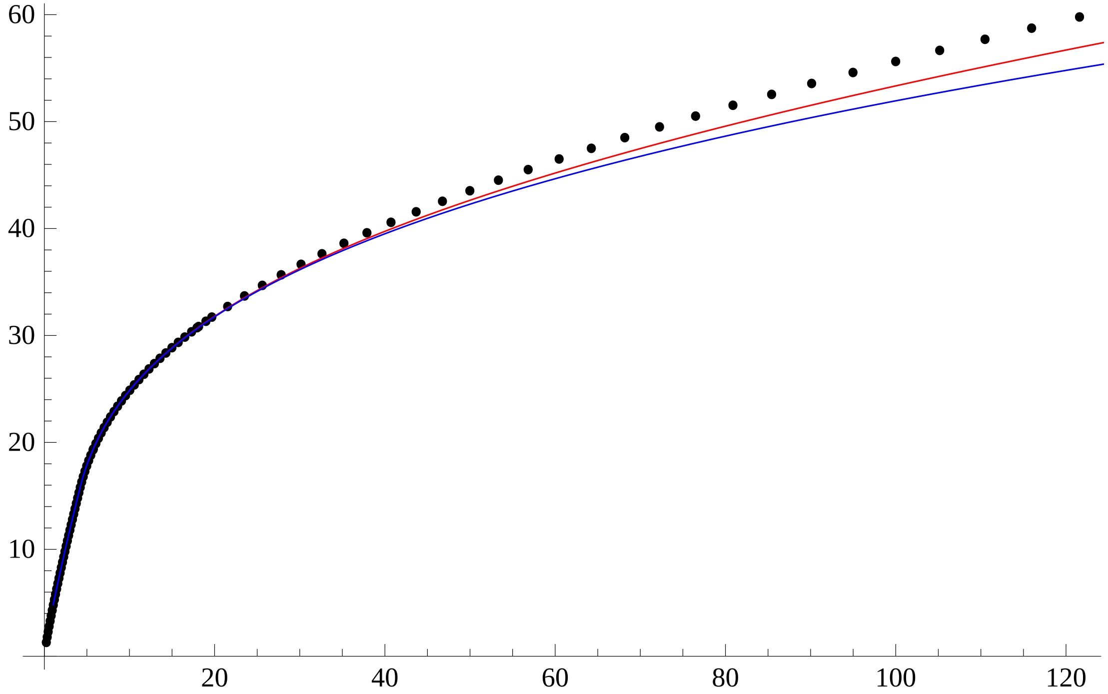
La bifurcation comme source d'optimalité ou le contraire

L'optimalité de la zone de symétrie semble être liée
à comment se passe la bifurcation des branches de solutions non-symétriques
à partir de la branche symétrique.

$$J^1(\mu) := \inf_{v \neq 0} \frac{\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathcal{C})} + \mu \, \|v\|^2_{L^2(\mathcal{C})}}{\|v\|^2_{L^p(\mathcal{C})}}$$

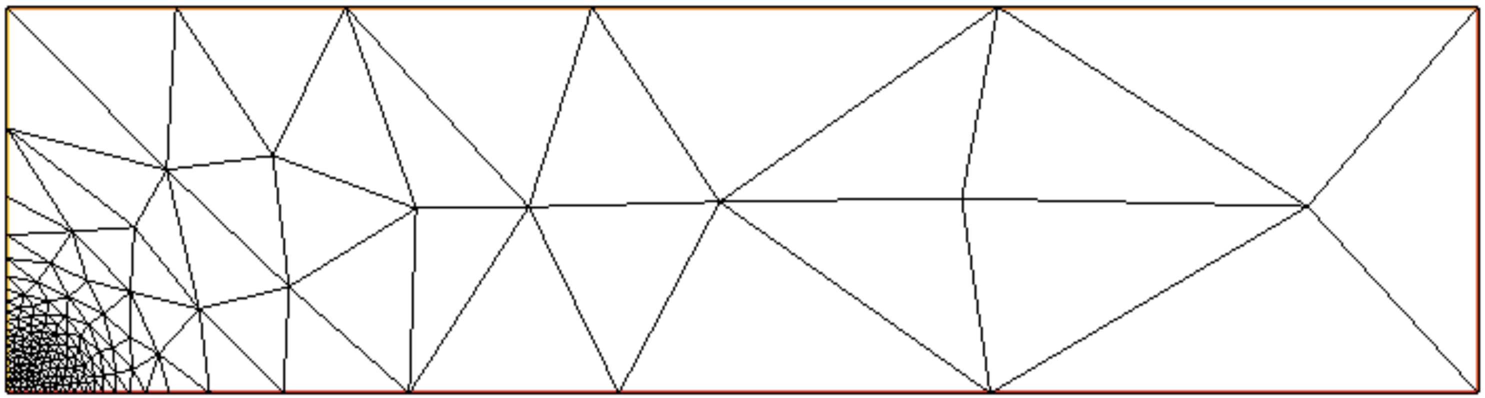


Calcul des fonctions non symétriques: problèmes de grilles

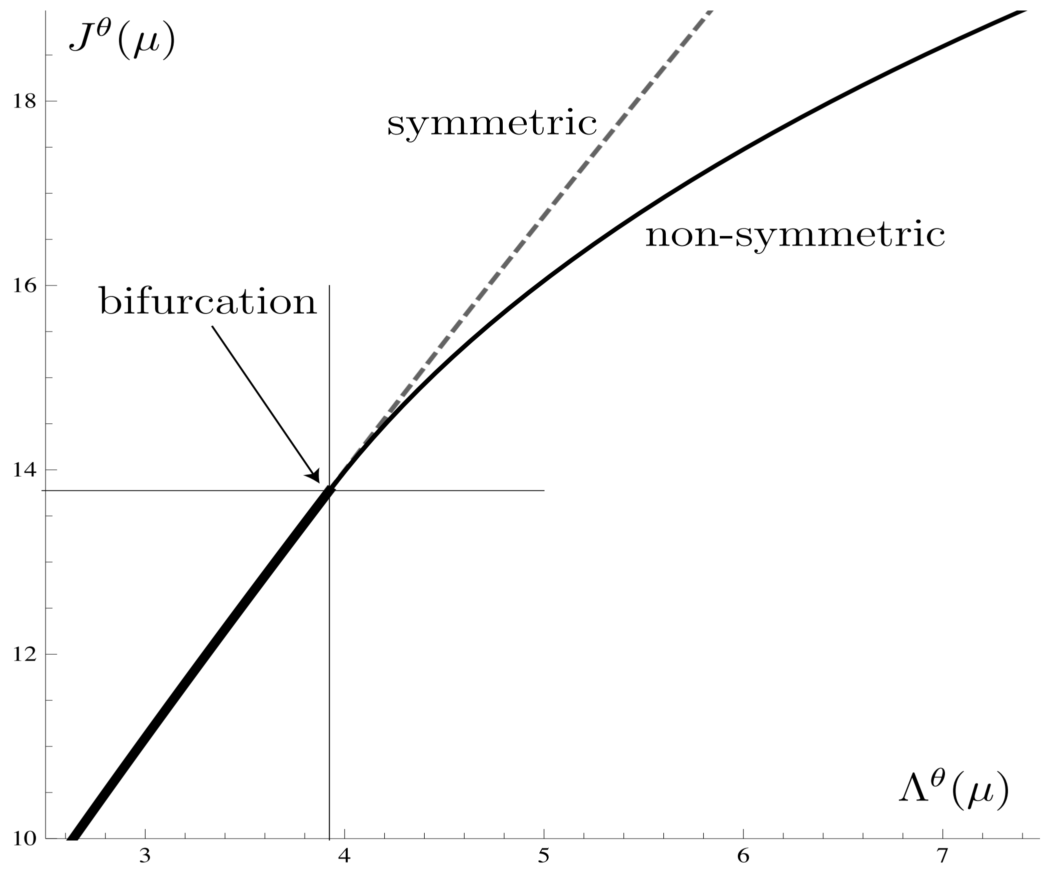


Grilles grossière / plus fine / auto-adaptative

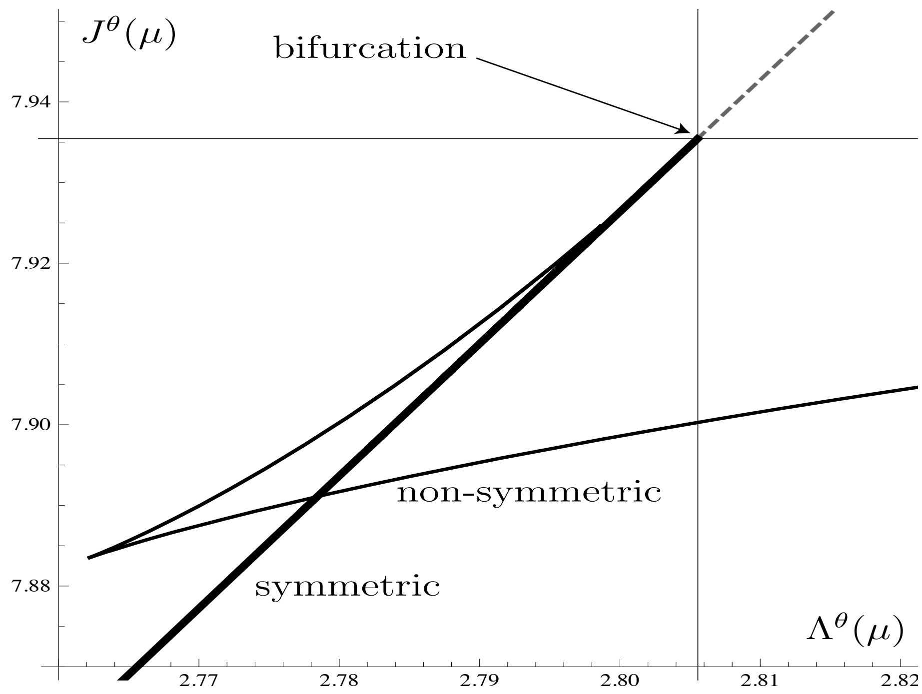
Grille auto-adaptative

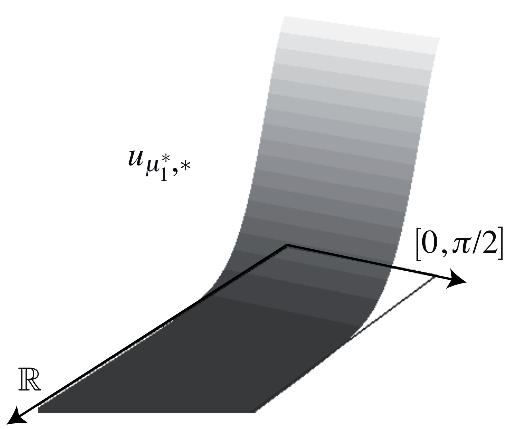


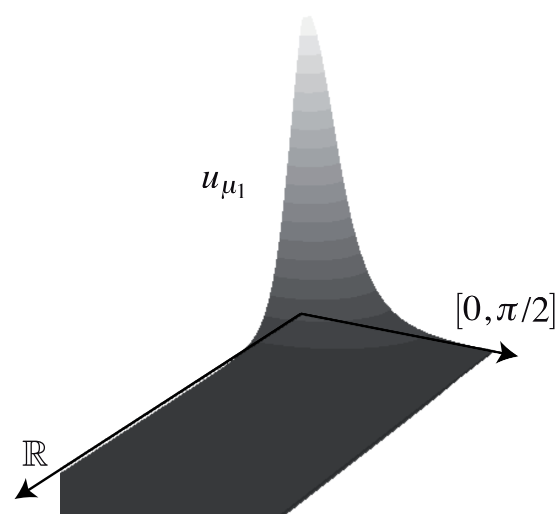
Agrandissement pour $p = 2.8$, $d = 5$, $\theta = 0.95$



Agrandissement pour $p = 2.8$, $d = 5$, $\theta = 0.72$







CONCLUSION

• L'étude des solutions positives de l'équation semi-linéaire

$$-\Delta u + \alpha u = u^{p-1} \quad \text{dans} \quad X$$

nous permet d'avoir des estimations précises sur la valeur propre principale d'opérateurs de Schrödinger

$$-\Delta - V$$

en fonction des normes L^p de la partie positive du potentiel V.

• Le plus d'information on a sur les propriétés des solutions de l'équation ci-dessus, meilleure sera l'estimation spectrale.

• Des résultats similaires peuvent être obtenus pour le Laplacien magnétique Δ_A ou pour d'autres opérateurs elliptiques.

D'où vient le comportement asymptotique de $\alpha(\mu)$ pour μ grand ?

Rappelons la définition de $\mu(\alpha)$:

$$\mu(\alpha) := \inf_{\substack{u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^d, d\sigma) \\ \int_{S^d} |u|^q \, d\sigma = 1}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(S^d)} + \alpha \, \|u\|^2_{L^2(S^d)}}{\|u\|^2_{L^q(S^d)}}$$

Si l'on définit le problème associé sur l'espace Euclidien

$$\mathsf{K}_{q,d} := \inf_{v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|v\|^2_{L^q(\mathbb{R}^d)}} ,$$

alors on peut démontrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha^{\vartheta - 1} \mu(\alpha) = \mathsf{K}_{q,d} \,, \qquad \vartheta := d \, \frac{q-2}{2\,q} \,.$$

En particulier, en utilisant comme fonctions tests des fonctions qui se concentrent autour d'un point quelconque de la sphère S^d.

Remarque.- Une fonction concentrée, quand on la déconcentre, nous amène vers une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$. “En étirant" une petite région de S^d “on tend" vers $\mathbb{R}^d$ ...