Un Exemple de Contributions Incontournables du Laboratoire d' Analyse Numérique:

La Résolution Numérique des Equations de Navier-Stokes Incompressibles

1. PREHISTOIRE

A la fin des années 1960 (1969 autant que je me souvienne) ***J.L. Lions*** avait réuni à l'***IRIA*** un certain nombre de ses lieutenants, dont j'étais, pour le lancement du projet

Navier-Stokes Numérique

ce qui revient à dire que cet exposé célèbre le ***40ème anniversaire*** d'un autre évènement important du ***Cal cul Scientifique*** et des ***Mathématiques Appliquées***

Dans l'esprit de ***JLL*** il s'agissait de résoudre numérique-ment le cas ***Newtonien***, ***incompressible***, ***isotherme***, avec ***conditions aux limites de Dirichlet homogènes***, dans des ***domaines bornés***, c'est à dire:

$\rho[\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}] - \mu\nabla^2\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$ dans $\Omega \times (0, T)$,

$\nabla.\mathbf{u} = 0$ dans $\Omega \times (0, T)$,

$\mathbf{u} = 0$ sur $\Gamma \times (0, T)$,

système pour lequel on avait des résultats d'***existence***, et parfois d'***unicité***, de ***solutions faibles***.

JL LIONS n'arrivait pas les mains vides et nous avait remis un dossier comprenant des articles (publiés ou à paraître) de:

1) ***A. Chorin*** et ***R. Temam*** sur des ***méthodes de décomposition d'opérateurs*** combinées à des ***approximations par differences finies***.
2) ***J.B. Rosen*** (l'homme du gradient projeté) sur une méthodologie combinant ***approximations polynomiales***, ***collocation***, ***Newton***, minimisation du sup des résidus par la ***méthode du simplexe*** de la ***Programmation Linéaire***. J.B. Rosen, utilisait une for mulation en ***fonction de courant*** (***4 citations*** dans ***Google Scholar*** !)

J.L. Lions avait un faible pour la méthode de Rosen car, visiblement, par rapport à sa (notre) culture, elle avait un “parfum étrange venu d’ailleurs ”; de plus, elle donnait de bons résultats.

Remarque 1: Très peu de temps après la réunion évoquée ci-dessus nous prenions connaissance d’un travail de ***P. Jamet*** & ***P. Lascaux*** (CEA-DAM) dédié à une méthode de ***différences finies*** , la condition $\nabla.\mathbf{u} = 0$ étant imposée (autant que je me souvienne) par une méthode de **projection** L^2

Remarque 2: A cette époque les mathématiciens n’avaient pas encore cherché à appliquer la ***Méthode des Eléments Finis*** à la résolution des ***équations de Navier-Stokes incompressibles***. Par contre les ingénieurs, qui eux avaient essayé, avaient mis en evidence des complications si on utilisait des approxima tions du même type pour la vitesse et la pression.

Remarque 3: Le ***Laboratoire d’Analyse Numérique*** venant de naître, l’essentiel de l’action concernant le sujet qui nous intéresse se passait ailleurs (mais plus pour longtemps !).

2. LES ANNEES 1970-1985 au LAN

De mon point de vue, elles furent les plus actives (ce qui n'est pas tout à fait étonnant puisque l'on partait presque de ***zero***), tous les aspects de la ***résolution numérique*** des équations de ***Navier-Stokes Incom pressibles*** faisant l'objet d'études approfondies, tout autant pour la formulation $\{\mathbf{u}, p\}$ que pour la formulat ion $\{\omega, \psi\}$. Nous allons lister les contributions suivan tes des uns et des autres (avec nos excuses envers ceux dont le nom est absent):

(I) Approximations par élements finis du problème de Stokes en {u, *p*} et {*ω*, *ψ*}

- L' élément de ***Crouzeix-Raviart*** (**u**, *p*): P_1-P_0
  (raccord des vitesses aux milieux des côtés; vérifie la ***condition inf-sup***).

- Méthode mixte **{*ω*, *ψ*}** pour le ***problème bi-harmonique*** (P_k-P_k): ***R.G., Ciarlet-Raviart***

- Article historique de ***F. Brezzi*** sur ***l'approximation des problèmes de point-selle*** et la ***condition inf-sup*** lors du 1er séjour de longue durée de ***FB*** au ***LAN***

(I) Approximations par élements finis du problème de Stokes en {u, *p*} et {*ω*, *ψ*} (suite)

- Démonstration par ***M. Bercovier*** et ***O. Pironneau*** de la convergence de la méthode de ***Hood-Taylor*** (P_2-P_1 conformes) et invention par les mêmes de l'approximation (P_1 iso P_2-P_1) dont ils démontrent la convergence.

- ***Bases locales à divergence nulle***: **F. Hecht**

(II) Résolution itérative du problème de Stokes et du problème bi-harmonique

Bonnet, Ciarlet, Crouzeix, Glowinski, Perronnet, Pironneau (point fixe, Tchebitcheff, gradient conjugué, Steklov-Poincaré, ……)

(III) Traitement de $(u.\nabla)u$

- **Décentrage:** ***Brédiff-Raviart***
- **Méthode des Caractéristiques:** ***Bercovier-Pironneau*** (plus tard ***Boukir-Maday***) (relève aussi de la ***discrétisation en temps***).

(IV) Discretisation en temps:

● **Méthode des Caractéristiques**

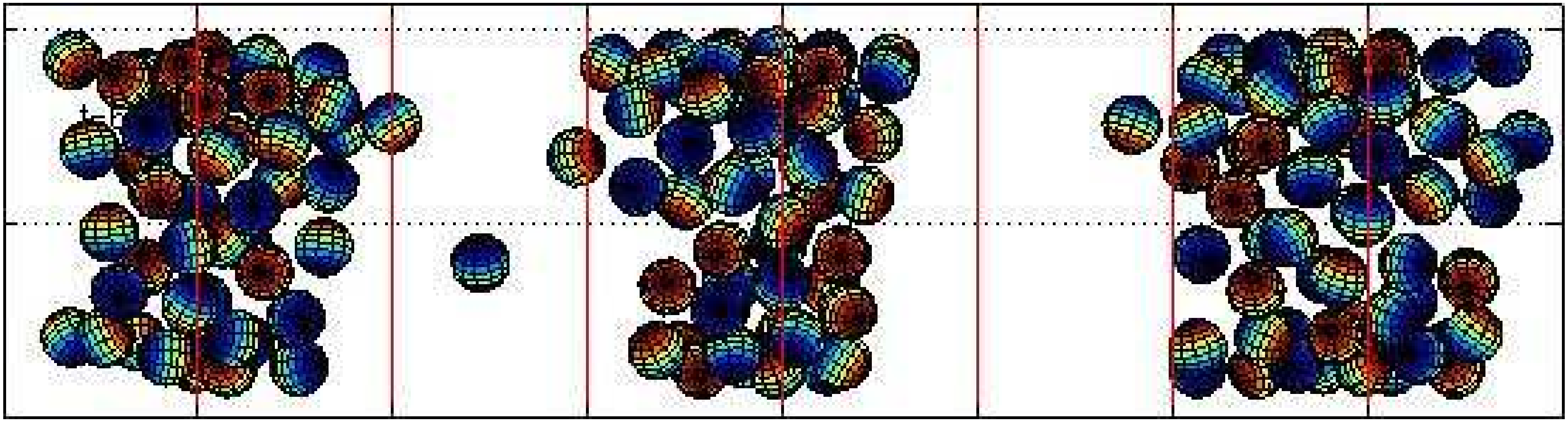
● ***θ-schéma fractionnaire*: *R. Glowinski*** [succès mitigé en ***France***, mais big scoop en ***Allemagne*** (***R.Rannacher***, ***S. Turek***, ***V. John*****, ***V. Heuveline***, ***E. Bansch***, etc…) où, il est encore utilisé, et en ***Australie*** (**CISRO**)]

Ces accomplissements ont fourni une très bonne base de lancement aux travaux qui ont suivi au ***LAN*** (devenu ***LJLL***) et ailleurs, en ***France*** et dans le ***Monde***.

3. QUELQUES LIVRES LIÉS AU AU *LAN* ET RELATIFS AUX TRAVAUX CI-DESSUS

- ***R. Glowinski***, Springer, 1984
- ***V. Girault & P.A. Raviart***, Springer, 1986
- ***O. Pironneau***, J. Wiley, 1989
- ***R. Glowinski***,**HNA**, North-Holland, 2003

4. UNE ILLUSTRATION



A rotating suspension of 160 settling balls in a horizontal cylinder filled fully by an incompressible viscous Newtonian fluid $36 < t < 50$: **Three stable clusters**