

**Proposition de stage de M2
Année universitaire 2011-2012**

Méthodes numériques pour l'homogénéisation des matériaux aléatoires

Sujet: On s'intéressera dans ce stage au développement de méthodes numériques efficaces pour le calcul de matériaux aléatoires comportant des hétérogénéités à une petite échelle. Un cas simple est celui où l'équation étudiée est

$$-\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \nabla u^\varepsilon\right) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \quad (1)$$

où A est une matrice symétrique, uniformément bornée et coercive, et *aléatoire*. Dans la limite où la taille des hétérogénéités est extrêmement petite ($\varepsilon \ll 1$), une approche naturelle consiste à homogénéiser le matériau, ce qui conduit à un matériau homogène équivalent. Dans le cas (1), le problème homogénéisé est

$$-\operatorname{div}\left(A^* \nabla u^*\right) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad u^* = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \quad (2)$$

où A^* est la matrice homogénéisée. Si les aspects théoriques de cette question sont maintenant bien compris, de nombreuses questions demeurent sur le plan numérique.

Nous nous sommes pour l'instant concentrés sur le cas (1)-(2), et avons développé dans ce cas elliptique scalaire

- une technique de *réduction de variance* (cf. par exemple [1]), permettant d'obtenir une approximation de A^* par un calcul moins coûteux que l'approche standard;
- des approches dédiées au cas où le matériau n'est que *faiblement stochastique*, qui sont moins coûteuses que l'approche générale (cf. par exemple [2]).

Le stage consistera à étendre ces approches à d'autres types d'équations, à développer d'autres techniques de réduction de variance encore plus efficaces, . . . Il permettra de se familiariser avec cette problématique, tant sur le plan numérique que sur le plan de l'analyse des EDP. Il s'inscrit dans un thème où l'équipe est déjà bien impliquée, en particulier à travers deux thèses, commencées respectivement en septembre 2008 et 2009.

Pré-requis: Ce stage nécessite de solides bases en analyse des EDP. Les connaissances nécessaires en probabilités pourront être acquises au cours du stage. Une bonne familiarité avec la programmation numérique sera appréciée.

Mots-clés: homogénéisation stochastique, EDP.

Encadrement et contact: Frédéric LEGOLL (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, legoll@lami.enpc.fr)

Financement: Ce stage sera indemnisé.

Thèse: Ce stage pourra être poursuivi vers une thèse.

References

- [1] R. Costeaouec, C. Le Bris et F. Legoll, *Variance reduction in stochastic homogenization: proof of concept, using antithetic variables*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 50:9–27, 2010 (cf. http://hal.inria.fr/inria-00457946_v1/)
- [2] C. Le Bris, *Some numerical approaches for “weakly” random homogenization*, Proceedings of ENUMATH 2009, Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering, G. Kreiss et al. (eds.), Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009, p. 29-45, 2010 (cf. <http://www-roc.inria.fr/micmac/spip.php?rubrique29>).