

STAGE DE M2 (Printemps 2012)

Étude de l'équation du multi-polaron dépendant du temps

Mathieu Lewin

(CNRS & Université de Cergy-Pontoise)

Un *polaron* est une particule quantique chargée, évoluant dans un milieu polarisable. Grâce à sa charge, elle polarise le milieu ambiant. Cette polarisation a ensuite des effets sur la particule elle-même. Les effets du milieu sont souvent décrits par des termes non linéaires.

L'exemple le plus simple est le modèle de Pekar dans lequel l'énergie du polaron est donnée par la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi(x)|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(x)|^2 |\varphi(y)|^2}{|x-y|} dx dy.$$

Ici la polarisation du milieu engendre une attraction non linéaire sur l'électron (le deuxième terme à droite). L'effet le plus remarquable est la possibilité que l'électron soit dans un *état lié* (un minimiseur de la fonctionnelle \mathcal{E} ci-dessus [5]). Ceci est impossible dans le vide, c'est-à-dire sans le terme non linéaire.

La situation est plus complexe pour un *N-polaron* qui comprend N particules au lieu d'une seule. Ces particules qui ont toutes la même charge se repoussent et en même temps ressentent une attraction non linéaire due à la polarisation du milieu. Les deux effets sont en compétition et, selon la valeur des paramètres, un N -polaron peut exister ou non dans un état lié [2, 4]. L'étude des N -polarons a connu un intérêt grandissant ces dernières années (voir par exemple [3, 2, 4]). Les modèles dépendant du temps n'ont presque pas été étudiés.

Le but du stage est d'étudier des équations dépendant du temps pour le N -polaron. On s'intéressera à l'existence de solutions, et à la construction de solutions particulières. On étudiera deux modèles.

Le modèle le plus simple est celui dans lequel le milieu peut suivre le polaron au cours du temps (hypothèse adiabatique). Cette hypothèse est satisfaite si l'électron n'a pas une vitesse trop élevée. L'équation prend alors la forme

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(-\Delta + \sum_{i=1}^N V_{\Psi}(x_i) + \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} \frac{1}{|x_k - x_{\ell}|} \right) \Psi \quad (1)$$

où $\Psi(x_1, \dots, x_N) \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ est la fonction d'onde à N -corps du système, et V_{Ψ} est le potentiel effectif dû à la polarisation du milieu.¹ Le troisième terme dans la parenthèse de l'équation (1) est la répulsion entre les particules. C'est une

1. Ce dernier dépend de Ψ et s'écrit sous la forme

$$V_{\Psi}(x) = -\alpha \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} dx_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} dx_N \frac{|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2}{|x - x_i|}.$$

équation de Schrödinger non linéaire à N corps. Il n'existe aucun résultat dans la littérature pour des équations de ce type.

Le but du stage sera de montrer l'existence et l'unicité d'une solution globale en temps et, surtout, de construire certaines solutions particulières (comme par exemple un bi-polaron contenant deux particules qui tournent l'une autour de l'autre). Il faudra alors utiliser des techniques d'analyse non linéaire adaptées aux problèmes à N corps [4].

Le modèle précédent n'est pas très réaliste car si le polaron se déplace trop vite, le milieu n'arrive pas à le suivre et "prend du retard". Le second objectif du stage sera d'écrire et d'étudier un modèle prenant en compte ces effets de retard. Pour le polaron simple, un tel modèle a déjà été proposé dans [1].

Renseignements pratiques

Lieu : Paris et/ou Cergy-Pontoise

Durée : 3–4 mois

Rémunération : oui (environ 430 euros par mois)

Le stage pourra déboucher sur une thèse, payée par le CNRS au sein du projet européen ERC de M. Lewin, cf

<http://mniqs.math.cnrs.fr>

Contact

Mathieu LEWIN

<http://lewin.u-cergy.fr>

mathieu.lewin@math.cnrs.fr

Références

- [1] P. BECHOUCHE, J. NIETO, E. R. ARRIOLA, AND J. SOLER, *On the time evolution of the mean-field polaron*, J. Math. Phys., 41 (2000), pp. 4293–4312.
- [2] R. L. FRANK, E. H. LIEB, R. SEIRINGER, AND L. E. THOMAS, *Stability and absence of binding for multi-polaron systems*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., (2011), pp. 39–67.
- [3] M. GRIESEMER AND J. S. MØLLER, *Bounds on the minimal energy of translation invariant n -polaron systems*, Commun. Math. Phys., 297 (2010), pp. 283–297.
- [4] M. LEWIN, *Geometric methods for nonlinear many-body quantum systems*, J. Funct. Anal., 260 (2011), pp. 3535–3595.
- [5] E. H. LIEB, *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Studies in Applied Mathematics, 57 (1977), pp. 93–105.