

Proposition de stage de M2

Existence et stabilité des solutions stationnaires pour des équations de diffusion fractionnaire

L'objet de ce stage est l'étude de modèles de diffusion fractionnaire, dont le plus simple s'écrit

$$(1) \quad \partial_t f = \Delta^{\alpha/2} f \quad \text{dans } \mathbb{R}^d,$$

où $\Delta^{\alpha/2}$ est le Laplacien fractionnaire défini pour $\alpha \in (0, 2)$ par

$$(\Delta^{\alpha/2} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{d+\alpha}} dy.$$

Il s'agit donc de l'équation d'évolution la plus simple qui fait apparaître un tel opérateur. Ce type d'opérateur et d'équation apparaît dans de nombreuses branches de la physique (des EDP de type Navier-Stokes faisant intervenir un Laplacien fractionnaire ont par exemple été récemment étudiées par L. Caffarelli et ses co-auteurs) et d'autres champs d'application (en probabilité le processus associé au Laplacien fractionnaire et sa généralisation, les processus de Lévy, sont très étudiés notamment récemment pour leurs applications à la finance). Notre motivation principale est quant à nous que l'équation de diffusion fractionnaire peut être considérée comme un modèle extrêmement simplifié d'une équation linéarisée de Boltzmann sans cut-off angulaire de Grad (...), et donc son étude est une première étape vers l'analyse mathématique de l'équation de Boltzmann.

Lorsqu'on s'intéresse au comportement en temps grand des solutions de (1) il est pertinent de faire un changement de variables et d'inconnue, et de considérer l'équation

$$(2) \quad \partial_t g = \mathcal{L} g = \Delta^{\alpha/2} g + \operatorname{div}(x g) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

Il existe une formule explicite qui permet de passer de g à f , mais cette fois l'équation (2) possède des équilibres non triviaux qui correspondent aux profils auto-similaires de (1). Il est pratique et usuel d'obtenir le comportement asymptotique en temps long de (1) à travers l'étude du comportement asymptotique en temps long de (2).

L'objectif de ce stage est multiple :

1) On commencera par s'attacher à retrouver par des méthodes simples d'EDP l'existence, l'unicité et la stabilité (dans au moins un espace) des solutions stationnaires de (2). A cet effet, on pourra s'inspirer de [2].

2) On tentera de généraliser ce type de résultat à des opérateurs plus généraux où le Laplacien fractionnaire est remplacé par un opérateur de Lévy et le terme de confinement harmonique par un terme de confinement général. L'idée est ici de combiner des arguments de [1] et [2].

3) L'étape suivante est de montrer que l'équation (2) et ses généralisations possèdent un "trou spectral" : une solution quelconque converge vers un équilibre à un taux exponentiel. Il est classique d'obtenir un tel résultat dans un certain espace de Hilbert E dans lequel l'opérateur \mathcal{L} est auto-adjoint. En adaptant des résultats récents de [4], on montrera que cette convergence avec taux exponentiel est également vraie dans tous les espaces $L^p(m)$ pour tout $p \in [1, \infty]$ et pour des poids m bien choisis.

4) Si le temps le permet, on s'intéressera à la généralisation de cette étude à l'équation de Boltzmann linéarisée pour un potentiel dur sans cut-off angulaire de Grad. Concernant ce vaste sujet, on pourra se référer à l'article récent [3] et aux articles qui y sont cités.

Le travail entrepris dans le cadre de ce stage, et notamment la question 4), pourra être poursuivi dans le cadre d'une thèse de doctorat.

Renseignements pratiques :

Lieu : Université Paris-Dauphine
Durée du stage : 5 mois
Rémunération/Indemnisation forfaitaire : oui
Responsable de stage : Stéphane Mischler
Email : mischler@ceremade.dauphine.fr

Références :

- [1] M. Escobedo, S. Mischler, M. Rodriguez Ricard, *On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire Vol. 22 (2005), No. 1, pp. 99-125
- [2] I. Gentil, C. Imbert, *The Lévy-Fokker-Planck equation : Φ -entropies and convergence to equilibrium*, Asymptotic Analysis Vol. 59 (2008), No. 3-4, pp. 125-138
- [3] P.T. Gressman, R.M. Strain, *Global Classical Solutions of the Boltzmann Equation without Angular Cut-off*, J. Amer. Math. Soc. Vol. 24 (2011), No. 3, pp. 771-847
- [4] M.P. Gualdani, S. Mischler, C. Mouhot, *Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/ccsd-0049578>